Тимур Зубайраев 416 гр

Задача №9

Пусть независимые случайные величины $\xi_n, n \in N_0 = \{0\} \cup N$ *определены на* $(\Omega, \mathbf{F}, P)$, *предположим, что они имеют общее экспоненциальное распределение с параметром* λ,$X_t = \inf\{n \in N_0 : \xi_0 + .. + \xi_n > t\}, \forall t > 0$. *Доказать, что* X_t *является случайной величиной* $\forall t > 0$. *Дать общее определение случайной величины.*

Пусть$(\Omega \neq \emptyset, \boldsymbol{F}), (S \neq \emptyset, \boldsymbol{B})$ - измеримые пространства, $\boldsymbol{B}-$ борелевская $\sigma-$алгебра.

Определение: Отображение $X : \Omega \to S$ называется измеримым если $X^{-1}(B) \in \boldsymbol{F}$ т.е. $X^{-1}(B) = \{\ \omega : X(\omega) \in B\} \in \boldsymbol{F}\ \forall B \in \boldsymbol{B}$

Измеримое отображение $X : \Omega \to S$ называется случайной величиной со значениями в S.

$N = X_t = \inf\{n \in N_0 : \xi_0 + .. + \xi_n > t\}$

$$\{\omega : N = n\} = \{\omega : \xi_0 < t\} \bigcap \{\omega : \xi_0 + \xi_2 < t\} \bigcap ...$$

$$\bigcap \{\omega : \xi_0 + \xi_1 + ... + \xi_{n-1} < t\} \bigcap \{\omega : \xi_0 + \xi_1 + ... + \xi_n > t\} =$$
$$= A_1 \bigcap A_2 \bigcap ... A_{(n-1)} \bigcap A_n^c$$

,где $A_i = \{\omega : \xi_0 + \xi_1 + ... + \xi_i < t\}$

По условию $\xi_1, \xi_2 ... \xi_n$ - независимые случайные величины,а следовательно при любом натуральном k $\sum_{i=1}^{k} \xi_i$ является случайной величиной. Стало быть $A_i \in \boldsymbol{F}$. Поскольку $\boldsymbol{F}-\sigma$-алгебра то $A_1 \cap A_2 \cap ...\ A_{(n-1)} \cap A_n^c \in \boldsymbol{F} \Rightarrow \{\omega : N = n\} \in \boldsymbol{F} \Rightarrow N = X_t$- случайная величина.